

# Der Diffusions-Kühlungseffekt

Von K. H. BECKURTS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforschg. 12 a, 956–959 [1957]; eingegangen am 18. Oktober 1957)

Das Gleichgewichtsspektrum „thermischer“ Neutronen in einem endlichen Streumedium wird unter Zugrundelegung eines vereinfachten Modells für das Streumedium berechnet. Dabei zeigt es sich, daß die Diffusionseffekte eine starke Modifikation der MAXWELLSchen Geschwindigkeitsverteilung bewirken können. Die Rechnungen werden verglichen mit einer vereinfachten Theorie, die den Diffusionseffekt lediglich durch eine Erniedrigung der Neutronentemperatur beschreibt.

In den letzten Jahren hat die nichtstationäre Impulsmethode zur Untersuchung der Diffusion thermischer Neutronen einige Bedeutung bekommen<sup>1–4</sup>. Diese Methode beruht auf der Bestimmung der Lebensdauer  $l$  der Neutronen in einem Streumedium mit Hilfe einer gepulsten Quelle und eines Zeitanalysators. Mittels der Beziehung

$$1/l = 1/l_0 + D \bar{v} B^2 \quad (1)$$

( $l_0 = 1/v \cdot \Sigma_a$  Lebensdauer gegen Einfang,  $D$  Diffusionskoeffizient in cm,  $B^2$  „Buckling“ des Streumediums in cm<sup>-2</sup>,  $\bar{v}$  mittlere Neutronengeschwindigkeit)

ist es dann möglich, aus der Lebensdauer  $l$  Rückschlüsse auf die Diffusionsparameter des zu untersuchenden Streumediums zu ziehen.

Der Diffusionskoeffizient ist dabei keine Konstante, sondern nimmt mit steigendem „Buckling“ des Streumediums ab. Dies rührt daher, daß das Gleichgewichtsspektrum der Neutronen am Ende des Bremsprozesses durch den Diffusionsvorgang, bei dem schnelle Neutronen das Streumedium bevorzugt verlassen, zu kleineren Neutronenenergien verschoben wird. Man setzt meist in 1. Näherung:

$$D \bar{v} = (D \bar{v})_0 - C B^2 \quad (2)$$

und bestimmt  $(D \bar{v})_0$  und  $C$  aus den Messungen.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, die Modifikation des Neutronenspektrums durch diesen „Diffusions-Kühlungseffekt“ und insbesondere die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten vom Buckling zu berechnen. Als Moderator wird der Einfachheit halber ein monatomares, ideales Gas aus schweren Kernen ( $A \gg 1$ ) mit dem energieunabhängigen Streuquerschnitt  $\sigma_{s0}$  betrachtet. Dies ist der einzige Moderatortyp, für den bislang derartige Rechnungen ausführbar sind.

Die Resultate der Rechnungen werden mit Messungen zu vergleichen sein. Insbesondere sollen sie aber verglichen werden mit einer elementaren Theorie<sup>1, 2, 4, 5</sup>, bei der dem Diffusions-Kühlungseffekt lediglich durch eine Verschiebung der Neutronentemperatur Rechnung getragen wird.

## 1. Grundgleichungen

Wir betrachten ein einheitliches, endliches Streumedium, in das zur Zeit  $t=0$  ein Impuls schneller Neutronen eingetreten sei. Die Neutronenintensität sei durch den Vektorfluß  $F(\mathbf{r}, \vec{\Omega}, t, E)$  beschrieben, dann gilt für  $F$  die allgemeine Transportgleichung:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{\Omega} F) - (\Sigma_a + \Sigma_s) F \quad (3)$$

$$+ \int_0^\infty dE' \int d\Omega' F(\mathbf{r}, \vec{\Omega}', t, E') \Sigma_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}).$$

Die  $P_1$ -Approximation (= elementare Diffusionstheorie) führt, wenn wir bedenken, daß bei schweren Kernen die Streuung im Laborsystem isotrop erfolgt und daß wir den Streuquerschnitt als konstant angenommen haben, und wenn wir die zeitlichen Variationen des Stromgliedes vernachlässigen, auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} &= -(\Sigma_a + \Sigma_s) \Phi(\mathbf{r}, E, t) + D \Delta \Phi(\mathbf{r}, E, t) \\ &+ \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE'. \end{aligned} \quad (4)$$

Hierbei ist  $\Phi = \int F(\vec{\Omega}) d\Omega$  der Neutronenfluß,  $D = 1/3 \Sigma_s$  der Diffusionskoeffizient und  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  der differentielle inelastische Streuquerschnitt des Moderators.

<sup>1</sup> G. F. V. DARDEL u. N. G. SJÖSTRAND, Phys. Rev. **94**, 1272 [1954].

<sup>2</sup> A. V. ANTONOV et al., Genfer Konf. 1955 P/661.

<sup>3</sup> A. BRACCI u. C. COCEVA, Nuovo Cim. **4**, 59 [1956].

<sup>4</sup> K. H. BECKURTS, Nucl. Sci. Eng. **2**, 516 [1957].

<sup>5</sup> G. F. V. DARDEL, Trans. Roy. Soc., Stockholm **75** [1954].



Uns interessiert von den Lösungen der Gl. (4) nur die „quasistationäre“ Lösung, d. h. die Gleichgewichtsverteilung, die sich am Ende des Bremsprozesses einstellt und durch

$$\Phi(r, E, t) = R(r) T(t) \Phi(E) \quad (5)$$

darzustellen sein muß.

Setzen wir  $R(r)$  als die den Randbedingungen entsprechende niedrigste Eigenfunktion, die zu dem (kleinsten) Eigenwert  $B^2$  gehört, an, und machen für  $T(t)$  den Ansatz  $T(t) = e^{-\lambda t}$ , so folgt

$$\left\{ \Sigma_a + \Sigma_{s0} + D B^2 - \frac{\lambda}{v} \right\} \Phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(E') dE', \quad (6)$$

und man findet durch Integration über alle Energien  $\lambda = 1/l = \Sigma_a v + D \bar{v} B^2$ , was der Gl. (1) entspricht.

Die für das Spektrum der Neutronen maßgebliche Integralgleichung lautet damit:

$$\left\{ \Sigma_{s0} + D B^2 \left( 1 - \frac{\bar{v}}{v} \right) \right\} \Phi(E) = \int_0^\infty \Phi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE'. \quad (7)$$

Für  $D B^2 = 0$ , also für das unendlich ausgedehnte Streumedium, führt sie natürlich auf eine MAXWELL-Verteilung  $\Phi(E) \sim E/T_0^2 \cdot e^{-E/kT_0}$ . Für  $D B^2 \neq 0$  reduzieren wir sie nach einem von HURWITZ und Mitarbeitern für eine ähnliche Gleichung vorgeschlagenen Verfahren auf eine Differentialgleichung<sup>6, 7</sup>.

Wir setzen dazu

$$\Phi(E) = y(E) \frac{E}{T_0^2} e^{-E/kT_0}. \quad (8)$$

Die Funktion  $y(E)$  gibt die Abweichungen des Spektrums von der MAXWELL-Verteilung wieder. Setzen wir Gl. (8) in (7) ein, so folgt

$$\left[ \Sigma_{s0} + D B^2 \left( 1 - \frac{\bar{v}}{v} \right) \right] y(E) = \int_0^\infty y(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE'. \quad (9)$$

Dabei haben wir die Identität

$$\Sigma_s(E \rightarrow E') E e^{-E/kT_0} = \Sigma_s(E' \rightarrow E) E' e^{-E'/kT_0},$$

die aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts für den inelastischen Streuquerschnitt eines Moderators der Temperatur  $T_0$  folgt, benutzt.

Wir entwickeln nun  $y(E')$  in der Umgehung von  $E' = E$  in eine TAYLOR-Reihe. (Die Konvergenz einer solchen Entwicklung diskutiert COHEN<sup>7</sup>.) Brechen wir nach dem 2. Glied ab, so folgt

$$y(E) \frac{D B^2}{\Sigma_{s0}} \left( 1 - \frac{\bar{v}}{v} \right) = y' \bar{A} E + \frac{y''}{2} \bar{A} E^2. \quad (10)$$

Dabei ist

$$\bar{A} E = \frac{1}{\Sigma_{s0}} \int_0^\infty \Sigma_s(E \rightarrow E') (E' - E) dE' = \frac{2}{A} (k T_0 - E), \quad (11)$$

$$\bar{A} E^2 = \frac{1}{\Sigma_{s0}} \int_0^\infty \Sigma_s(E \rightarrow E') (E' - E)^2 dE' = \frac{4}{A} E k T_0.$$

Die Gln. (11) gelten unter der Voraussetzung, daß der Moderator ein monoatomares, ideales Gas von schweren Kernen (Atomgewicht  $A \gg 1$ ) mit dem konstanten Streuquerschnitt  $\Sigma_{s0}$ , Temperatur  $T_0$ , ist. Die Größe  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  für einen solchen Moderator wird z. B. bei WIGNER und WILKINS<sup>8</sup> oder bei v. DARDEL<sup>5</sup> hergeleitet. Es zeigt sich, daß die höheren „Momente“  $\bar{A} E^n \dots$  von höherer Ordnung in  $1/A$  verschwinden.

Setzen wir Gl. (11) in Gl. (10) ein, so folgt, wenn wir zur Abkürzung den Parameter  $\Gamma = 2 A D B^2 / \Sigma_{s0}$  einführen und wenn wir  $x^2 = E/k T_0$  setzen:

$$x y''(x) + (3 - 2 x^2) y'(x) + \Gamma(x - x) y(x) = 0. \quad (12)$$

Dabei ist

$$\kappa = \frac{\bar{v}}{\sqrt{2} k T_0 / m} = \frac{\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} y(x) dx}{\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} y(x) dx}. \quad (13)$$

Für den Neutronenfluß  $\Phi(E)$  gilt dann:

$$\Phi(E) = x^2 e^{-x^2} y(x), \quad (14)$$

wo

$$x = \sqrt{E/k T_0}.$$

## 2. Berechnung des Neutronenspektrums

Gl. (12) wurde für verschiedene Werte des Parameters  $\Gamma$  von Herrn Dr. H. WERNER auf der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G 2 gelöst.

Dies geschah im einzelnen folgendermaßen: Zunächst wurde ein annähernd richtiger Schätzwert von  $\kappa$  angenommen. Die Lösung erfolgte dann vom Anfangswert  $y(0) = 1$  ausgehend nach einem vereinfachten RUNGE-KUTTA-Verfahren; dazu wurde Gl. (12) in ein System von zwei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

<sup>6</sup> H. HURWITZ, M. S. NELKIN u. G. J. HABETLER, Nucl. Sci. Eng. 1, 280 [1956].

<sup>7</sup> E. R. COHEN, Genfer Konf. 1955, P/611.

<sup>8</sup> E. P. WIGNER u. J. WILKINS, AECD 2275 [1948].

aufgespalten. Aus der Lösungskurve  $y(x)$  folgt durch Integration ein verbesserter  $\kappa$ -Wert, mit dem die Rechnung wiederholt wird. Das Verfahren konvergiert nach etwa 3–4 Schritten. Gerechnet wurde das Spektrum bei  $\Gamma = 0, 0,5, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Abb. 1 zeigt die für  $\Gamma = 0, 2, 4$  erhaltenen Neutronenspektren. Man erkennt, daß der Diffusions-Kühlungseffekt in der Tat eine Verschiebung des Neutronenspektrums zu kleineren Energien bewirkt, die bei starkem Ausfluß erheblich sein kann.

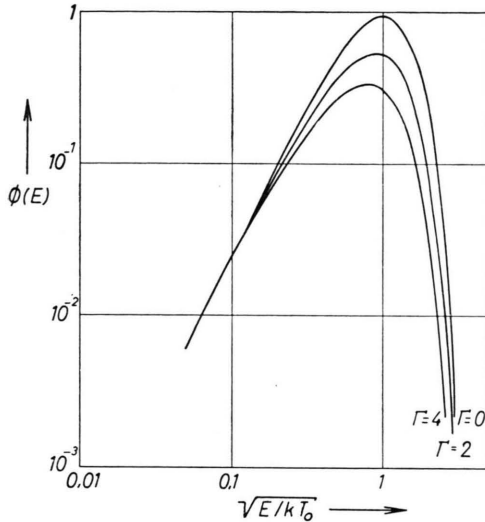


Abb. 1. Das durch den Diffusions-Kühlungseffekt modifizierte Neutronenflußspektrum.

Abb. 2 zeigt die Größe  $\kappa = \bar{v}/\sqrt{2 k T_0/m}$  als Funktion von  $\Gamma$ . Diese Abbildung ist besonders wichtig, weil bei Experimenten mit einer gepulsten Quelle diese Größe unmittelbar gemessen wird.  $\kappa$  zeigt einen in erster Näherung linearen Abfall mit  $\Gamma$ .

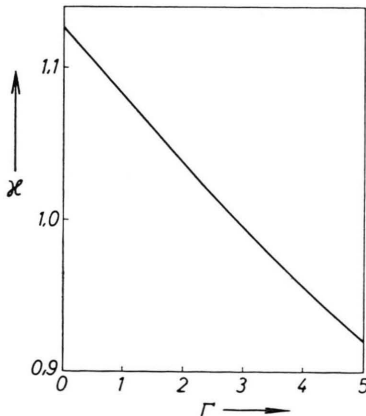


Abb. 2.  $\kappa = \bar{v}/\sqrt{2 k T_0/m}$  als Funktion von  $\Gamma$ .

### 3. Vergleich mit der elementaren Theorie

Man kann – unabhängig von unseren bisherigen Überlegungen – eine Energiebilanz des Neutronengases beim Diffusions-Kühlungseffekt aufstellen. Infolge der dem Neutronenfluß proportionalen Diffusion entzieht nämlich jedes Neutron, das durch Diffusion aus dem Neutronengas verschwindet, diesem den Energieüberschuß

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty E \Phi(E) dE}{\int_0^\infty \Phi(E) dE} - \frac{\int_0^\infty E n(E) dE}{\int_0^\infty n(E) dE}. \quad (15)$$

$n(E) = \Phi(E)/v$  ist die Neutronendichte.

Diese Energie muß vom Moderator nachgeliefert werden, also

$$D B^2 \varepsilon = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) (E' - E) dE dE'}{\int_0^\infty \Phi(E') dE'}. \quad (16)$$

Unter Benutzung der Gl. (11) folgt hieraus

$$\frac{\int_0^\infty E \Phi(E) dE}{\int_0^\infty \Phi(E) dE} \left(1 + \frac{\Gamma}{4}\right) = \frac{\Gamma}{4} \frac{\int_0^\infty E n(E) dE}{\int_0^\infty n(E) dE} + 2 k T_0. \quad (17)$$

Diese unabhängige Beziehung wurde auch zur Kontrolle der obigen Berechnungen des Geschwindigkeitspektrums benutzt.

Auf v. DARDEL<sup>5</sup> geht nun eine elementare Näherung zurück, bei der angenommen wird, daß sich das Neutronenspektrum durch eine MAXWELL-Verteilung mit einer Temperatur  $T$ , die unter der Moderatortemperatur  $T_0$  liegt, darstellen läßt. Der Wert von  $T$  als Funktion von  $\Gamma$  folgt aus dem Energiesatz (17): Ist nämlich  $n(E)$  eine MAXWELL-Verteilung, so gilt

$$\frac{\int_0^\infty E \Phi(E) dE}{\int_0^\infty \Phi(E) dE} = 2 k T \quad \text{und} \quad \frac{\int_0^\infty n(E) E dE}{\int_0^\infty n(E) dE} = \frac{3}{2} k T.$$

also ergibt Gl. (17)

$$T = T_0 - \frac{\Gamma}{16} T \approx T_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{16}\right). \quad (18)$$

In Abb. 3 vergleichen wir die von uns berechneten Spektren mit MAXWELL-Verteilungen, deren Tem-

peratur nach Gl. (18) bestimmt wurde. Aufgetragen ist die Größe  $\log \Phi(E)/E$ , die – wenn  $n(E)$  eine MAXWELL-Verteilung ist – eine Gerade sein sollte. Man sieht aber, daß die berechneten Spektren von der MAXWELL-Verteilung stark abweichen. Die elementare Rechnung stellt daher das Spektrum nur in einer schlechten Näherung dar. Dies dürfte auch bei anderen Moderatoren wie  $H_2O$  oder Graphit, in denen die chemische Bindung der Streuatome nicht mehr zu vernachlässigen ist, der Fall sein.

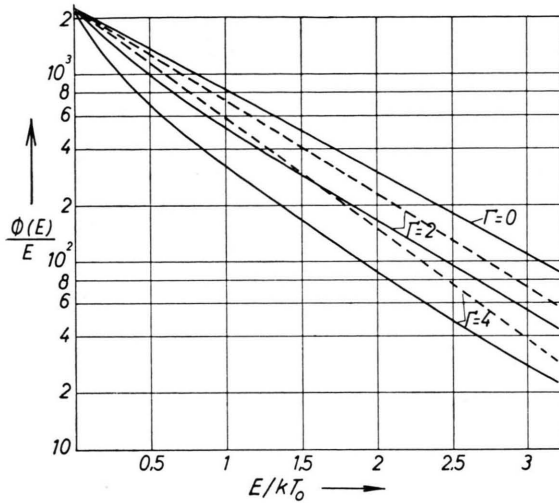


Abb. 3. Vergleich der exakt (—) und elementar (---) berechneten Neutronenspektren. (Die Spektren sind nicht auf 1 normiert.)

Für die mittlere Geschwindigkeit ergibt Gl. (18) in 1. Näherung

$$\bar{v} \approx \sqrt{\frac{8 k T_0}{\pi m}} \left[ 1 - \frac{\Gamma}{32} \right]. \quad (19 a)$$

Aus der exakten Rechnung folgt (durch eine lineare Approximation der in Abb. 2 dargestellten  $\alpha$ -Werte)

$$\bar{v} \approx \sqrt{\frac{8 k T_0}{\pi m}} \left[ 1 - \frac{\Gamma}{25} \right]. \quad (19 b)$$

Die elementare Rechnung liefert also für die bei einem Diffusionsexperiment meßbare mittlere Neu-

tronengeschwindigkeit eine recht gute Näherung. Auch diese Aussage kann man mit einiger Vorsicht auf beliebige Moderatoren übertragen. Wir bemerken das hier besonders, weil in einem Moderator mit chemischen Bindungen eine geschlossene exakte Behandlung des Diffusions-Kühlungseffektes nicht möglich ist, wohl aber eine Art „elementare“ Rechnung, die etwas anders als die hier skizzierte Ableitung erfolgt<sup>2, 4</sup>.

#### 4. Vergleich mit Messungen

Der Diffusions-Kühlungseffekt ist bislang in  $H_2O$ , Beryllium und Graphit experimentell untersucht worden. In allen diesen Streumедien sind die chemischen Bindungen keinesfalls zu vernachlässigen. In  $H_2O$  zeigt der Streuquerschnitt und damit auch der Diffusionskoeffizient  $D$  eine starke Abhängigkeit von der Neutronenenergie, es erscheint daher wenig angemessen, unsere Rechnung mit den im übrigen auch stark streuenden Meßergebnissen zu vergleichen.

In Graphit und Beryllium können wir zumindest formal Theorie und Messung vergleichen, indem wir die chemische Bindung durch Einführung eines effektiven Atomgewichts der gebundenen Streuatome berücksichtigen.

Eigene Messungen in Graphit der Dichte<sup>4</sup> 1,6 führen auf

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k T_0}{\pi m}} (1 - 7,6 B^2). \quad (20)$$

Um  $\bar{v}$  durch Gl. (19 b) darzustellen, müssen wir dort ein effektives Atomgewicht des im Graphitgitter gebundenen Kohlenstoffatoms von ca. 40 einführen. Auf den gleichen Wert führen auch Analysen der in Graphit gemessenen stationären Neutronentemperatur und des Wärmeübertragungskoeffizienten vom Neutronengas zum Graphitgitter<sup>9, 10</sup>.

Herrn Dr. H. WERNER danke ich für die Ausführung der numerischen Rechnungen. Herrn Prof. BIERMANN bin ich für die Erlaubnis zur Benutzung der Rechenmaschine G 2 zu Dank verpflichtet.

<sup>9</sup> M. KÜCHLE, Nucl. Sci. Eng. **2**, 87 [1957].

<sup>10</sup> K. H. BECKURTS et al., Phys. Verh. **8/2** 17 [1957].